ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Interaktive Aufgabe für die Übung 2

Fünf Buchstaben werden nacheinander zufällig und unabhängig voneinander

a) „mit Zurücklegen", d.h. mit der Möglichkeit von Wiederholungen,

b) „ohne Zurücklegen", d.h. ohne Wiederholungen,

aus den 26 Grossbuchstaben des Alphabets ausgewählt, wobei für alle Buchstaben die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, gleich ist. Die fünf Buchstaben werden in der Reihenfolge, in der sie gezogen wurden, zu einem 'Wort' zusammengesetzt.

1. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

B_1 = „Man zieht einen Vokal beim ersten Mal"

B_2 = „Man zieht einen Vokal beim zweiten Mal" (Bem.: Die Vokale sind A, E, I, O, U.)

Bestimmen Sie für a) und b) jeweils ob B_1 und B_2 unabhängig sind.

Lösung:

a) „Mit Zurücklegen:"
Ja, B_1 und B_2 sind unabhängig. Mit dem Laplace-Modell erhalten wir

$$P[B_2|B_1] \quad = \quad P[B_2|B_1^c] = P[B_2].$$

Der Ball wird wieder zurueck gelegt, daher ist es nicht relevant, was im ersten Zug passiert ist.

b) „Ohne Zurücklegen:"
Wieder nehmen wir das Laplace Modell für jedes Ziehen, sodass

$$\begin{aligned} P[B_2|B_1] &= 4/25 = 0.16, \\ P[B_2|B_1^c] &= 0.2. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Information, ob B_1 eingetreten ist, ändert die Wahrscheinlichkeit von B_2.
Alternativ und näher am Skript:

$$P[B_2] = P[B_2|B_1]P[B_1] + P[B_2|B_1^c]P[B_1^c] = \frac{4}{25}\frac{5}{26} + \frac{5}{25}\frac{21}{26} \approx 0.192.$$

Also gilt $P[B_2|B_1] < P[B_2] < P[B_2|B_1^c]$, d.h. wenn B_1 eingetreten ist, wird die Wahrscheinlichkeit, dass B_2 eintritt geringer. Wenn B_1^c eingetreten ist, wird sie größer.

2. Bestimmen Sie für a) und b) jeweils die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A_1 = „Das 'Wort' enthält mindestens ein A.“

A_2 = „Das 'Wort' enthält genau einen Vokal.“ (Bem.: Die Vokale sind A, E, I, O, U.)

A_3 = „Das 'Wort' ist APRIL.“

Tipp: Für $P(A_1)$, berechne zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass das 'Wort' kein A enthält.

Lösung:

a) „Mit Zurücklegen:“

$$\begin{aligned} P[A_1] &= 1 - P[A_1^c] = 1 - \left(\frac{25}{26}\right)^5 \approx 0.178 \\ P[A_2] &= 5\left(\frac{5}{26}\right)\left(\frac{21}{26}\right)^4 \approx 0.409 \\ P[A_3] &= \left(\frac{1}{26}\right)^5 \approx 8.4 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

b) „Ohne Zurücklegen:“

$$\begin{aligned} P[A_1] &= 1 - P[A_1^c] = 1 - \frac{25}{26}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{23}{24}\cdot\frac{22}{23}\cdot\frac{21}{22} = \frac{5}{26} = 0.192308 \\ P[A_2] &= \frac{\binom{5}{1}\binom{21}{4}}{\binom{26}{5}} = 5\frac{5}{26}\frac{21}{25}\frac{20}{24}\frac{19}{23}\frac{18}{22} \approx 0.455 \\ P[A_3] &= \frac{1}{26}\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{23}\cdot\frac{1}{22} \approx 1.267 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Alternative Berechnungsmöglichkeiten von $P[A_1]$:

$$
\begin{aligned}
P[A_1] &= \frac{\binom{25}{4}}{\binom{26}{5}} = \frac{5}{26} \quad \text{oder} \\
P[A_1] &= 1 - P[A_1^c] = 1 - \frac{\binom{25}{5}}{\binom{26}{5}} = 1 - \frac{25!}{5!\ 20!} \cdot \frac{21!\ 5!}{26!} = 1 - \frac{21}{26} = \frac{5}{26}
\end{aligned}
$$